PROBABILIDADES - 2º Ano MAEG **20. 06. 2017**

TESTE REFERENTE À 2ª PARTE

Nome:____**Número:**_________

Cotação: (**Espaço reservado para classificações**)

1a.(10)	**2a.(5)**	**3a.(10)**	**4. (15)**
1b.(10)	**2b.(10)**	**3b.(15)**	
1c.(10)		**3c.(15)**	

Nota: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. Admita que o número de navios de cruzeiro que chegam diariamente a determinado porto segue uma distribuição de Poisson de média 3 e que as chegadas são independentes de dia para dia.
   a. **[10]** Considere um período de três dias consecutivos. Qual a probabilidade de, nesse período, chegarem menos de 10 navios de cruzeiro?

   $Y=\sum_{i=1}^{3}X_i$ sendo X_i o numero de chegadas no dia i com $X_i \sim Po(3)$.
   Logo $Y \sim Po(9)$ já que existe independência entre dias consecutivos.
   $P(Y<10)=P(Y\le 9)=0.5874$

   b. **[10]** Qual a probabilidade de num mês (30 dias) chegarem menos de 80 navios?

   W nº de navios que chegam por mês (30 dias) $Y=\sum_{i=1}^{30}X_i \sim Po(90)$ ou $Z=\dfrac{W-90}{\sqrt{90}} \overset{\circ}{\sim} n(0;1)$

   $$P(W<80)=0.1332 \quad \text{(utilizando a máquina)}$$
   $$\approx \Phi\left(\frac{79.5-90}{\sqrt{90}}\right)=\Phi(-1.11)=1-0.8665=0.1335 \quad \text{(pelo TLC)}$$

   c. **[10]** Num ano (365 dias) qual a probabilidade de não se registar nenhuma chegada de um navio de cruzeiro em mais de 20 dias?

   N número de dias, num ano, em que não chegam navios
   $N \sim b(365,p)$ com $p=P(X=0)=0.0498$ já que $X \sim Po(3)$
   $$P(N>20)=1-P(N\le 20)=0.2797 \quad \text{(máquina)}$$
   $$\approx 0.2835 \quad \text{(Poisson média 18.177) ou 0.2693 (Poisson média 18)}$$
   $$\approx 1-\Phi\left(\frac{20.5-365\times 0.0498}{\sqrt{365\times 0.0498\times 0.9502}}\right)=1-\Phi(0.5590)=0.2877 \quad \text{(TLC)}$$

2. Admita que a duração em minutos de uma canção é bem modelada por uma distribuição normal de média 3.5 e desvio padrão 0.5.
   a. **[5]** Que percentagem das canções tem uma duração superior a 2.25 minutos?

   X duração (em min) de uma canção $\qquad X \sim n(3.5;\sigma=0.5)$
   $$P(X>2.25)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{2.25-3.5}{0.5}\right)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>-2.5\right)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<2.5\right)=0.9938$$

b. **[10]** Para um segmento de 30 minutos de um programa de rádio, o locutor escolhe 8 canções ao acaso. Calcule a probabilidade de ele conseguir passar todas as canções que escolheu no tempo disponível

Y duração em min de 8 canções (admite-se a independência) $Y=\sum_{i=1}^{8} X_i \sim n(28;\sqrt{0.25\times 8})$

$$P(Y\le 30)=\Phi\left(\frac{30-28}{\sqrt{2}}\right)=\Phi\left(\sqrt{2}\right)=0.92135$$

3. Considere que o tempo que uma pessoa demora a ser atendida numa repartição de finanças segue uma distribuição Gama de média 10 minutos e variância igual a 25.

a. **[10]** Qual a probabilidade do tempo de atendimento ser inferior a 22 minutos?

X tempo de atendimento (min) $X\sim G(\alpha;\lambda)$ já que $\mu=10=\dfrac{\alpha}{\lambda}$ e $\operatorname{var}(X)=25=\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$

Como $\mu=10=\dfrac{\alpha}{\lambda}$ e $\operatorname{var}(X)=25=\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$ vem $\lambda=0.4$ e $\alpha=4$ donde $X\sim G(4;0.4)$

$P(X<22)=P(Y<17.6)\approx 0.975$

Já que $X\sim G(4;0.4)\Rightarrow Y=0.8X\sim \chi^2_{(8)}$

b. **[15]** Determine a probabilidade do tempo total necessário para atender 10 pessoas ser superior a 2 horas.

Seja W o tempo necessário para atender 10 pessoas

$W=\sum_{i=1}^{10} X_i \sim G(40;0.4)$ e portanto $0.8W\sim\chi^2_{(80)}$

$P(W>120)=P(0.8W>96)=0.10$

c. **[15]** Havendo um posto de atendimento que funciona ininterruptamente 8 horas por dia, quantas pessoas podem ser atendidas num dia com probabilidade 0.9 (aproximadamente)?

Seja n o número de pessoas atendidas em 8 horas (n inteiro)

Procura-se o maior n inteiro tal que $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\le 8\times 60\right)\approx 0.9$

A **primeira alternativa** seria considerar $V=\sum_{i=1}^{n} X_i\sim G(4n;0.4)$ e portanto $0.8\sum_{i=1}^{n} X_i\sim\chi^2_{(8n)}$

Como $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\le 480\right)\approx 0.9 \Leftrightarrow P\left(0.8\sum_{i=1}^{n} X_i>384\right)\approx 0.1$, procurava-se o valor 384 na coluna do 0.1 na tabela e depois dividia-se por 8 para obter o valor de n. Infelizmente os valores são crescentes mas acabam em 118.498 e portanto tem de se utilizar o TLC.

Segunda alternativa utilizando o TLC vem $Z=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i-10n}{5\sqrt{n}}\overset{\circ}{\sim} n(0;1)$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\le 8\times 60\right)\approx 0.9\Leftrightarrow P\left(Z\le\frac{480-10n}{5\sqrt{n}}\right)\approx 0.9$$

$$\Leftrightarrow\Phi\left(\frac{480-10n}{5\sqrt{n}}\right)\approx 0.9\Leftrightarrow\frac{480-10n}{5\sqrt{n}}\approx 1.282$$

$$480-10n\approx 1.282\times 5\sqrt{n}\Leftrightarrow 10n+6.41\sqrt{n}-480\approx 0$$

Fazendo $r=\sqrt{n}$ e resolvendo a equação do 2º grau vem $r=\dfrac{-6.41+\sqrt{6.41^2+4\times 10\times 480}}{20}=6.615$ (r tem de ser >0) e portanto $n\approx 43.76$ que arredonda para 43 e quisermos ser rigorosos.

4. **[15]** Seja $\{X_n\}$ uma sucessão de v.a. independentes e identicamente distribuídas, com $E(X_n)=\mu$ e $\text{var}(X_n)=\sigma^2$. Prove que $Y_n \xrightarrow{P} \mu$, sendo $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ o termo geral da sucessão $\{Y_n\}$.

Tem de provar-se que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P(|Y_n - \mu| < \varepsilon) = 1$ sendo $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = \text{var}(X)$

Como $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ vem $E(Y_n) = \frac{n\mu}{n} = \mu$ e $\sigma_{Y_n}^2 = \text{var}(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

Desigualdade de Chebychev: $P(|Y_n - \mu_{Y_n}| < t\sigma_{Y_n}) \geq 1 - 1/t^2$

Fazendo $\varepsilon = t\sigma_{Y_n} \Leftrightarrow t = \varepsilon / \sigma_{Y_n}$, vem $P(|Y_n - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{(t/\sigma_{Y_n})^2} = 1 - \frac{\sigma_{Y_n}^2}{t^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{nt^2}$ e portanto

$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - \mu| < \varepsilon) \geq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\sigma^2}{nt^2}\right) = 1$, $\forall \varepsilon > 0$, ficando provado que $Y_n \xrightarrow{P} \mu$.